UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso 2009/2010
MATERIA: MATEMATICAS II. Fase de Modalidad

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 3$, y utilizando las propiedades de los determinantes, calcular:

a) (1 punto) El determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}^4$

b) (1 punto) $\begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3\alpha & 3\beta & 3\gamma \end{vmatrix}$ **c)** (1 punto) $\begin{vmatrix} 3\alpha+2 & 3\beta+4 & 3\gamma+6 \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ \alpha+6 & \beta & \gamma+3 \end{vmatrix}$

Solución.

a. $$\left|\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}^4\right| \overset{(i)}{=} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}^4 = \begin{vmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}^4 \overset{(ii)}{=} \left(2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}\right)^4 = 2^4\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}^4 =$$

$$= 2^4\cdot 3^4 = 1296$$

(i) $\left|A^n\right| = |A|^n$

(ii) Si todos los términos de una línea (fila ó columna) de un determinante tienen un factor común, este se saca como factor del determinante.

$$\begin{vmatrix} a_{1.1} & a_{2.1} & a_{3.1} \\ k\cdot a_{2.1} & k\cdot a_{2.2} & k\cdot a_{3.2} \\ a_{3.1} & a_{3.2} & a_{3.3} \end{vmatrix} = k\cdot\begin{vmatrix} a_{1.1} & a_{2.1} & a_{3.1} \\ a_{2.1} & a_{2.2} & a_{3.2} \\ a_{3.1} & a_{3.2} & a_{3.3} \end{vmatrix}$$

b. $$\begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3\alpha & 3\beta & 3\gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10\cdot 1 & 10\cdot 2 & 10\cdot 3 \\ \frac{1}{3}\cdot 6 & \frac{1}{3}\cdot 0 & \frac{1}{3}\cdot 3 \\ 3\cdot\alpha & 3\cdot\beta & 3\cdot\gamma \end{vmatrix} \overset{(ii)}{=} 10\cdot 3\cdot\frac{1}{3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 10\cdot 3 = 30$$

c. $$\begin{vmatrix} 3\alpha+2 & 3\beta+4 & 3\gamma+6 \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ \alpha+6 & \beta & \gamma+3 \end{vmatrix} \overset{(ii)}{=} 2\cdot\begin{vmatrix} 3\alpha+2 & 3\beta+4 & 3\gamma+6 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha+6 & \beta & \gamma+3 \end{vmatrix} \overset{(iii)}{=} \left\{\begin{matrix} F_1 = F_1 - 3F_2 \\ F_3 = F_3 - F_2 \end{matrix}\right\} = 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot\begin{vmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix} \overset{(ii)}{=} 2\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix} \overset{(iv)}{=} \{F_2 \leftrightarrow F_3\} = -4\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = -4\cdot 3 = -12$$

(iii) Si a una línea (fila ó columna) de un determinante se le suma o resta una linea paralela multiplicada por cualquier número, el determinante no varia.

(iv) Sí se intercambia la posición de dos líneas (filas ó columnas), el determinante cambia de signo.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.
Dada la recta:

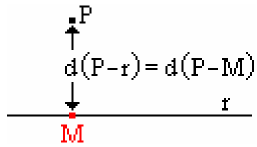
$$r \equiv \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{3}$$

y el punto P (2, 0, −1), se pide:

a) (1 punto) Hallar la distancia del punto P a la recta r.

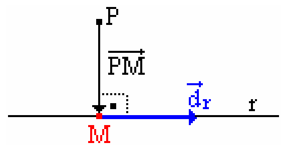
b) (2 puntos) Hallar las coordenadas del punto P' simétrico de P respecto de la recta r.

Solución.



a. La distancia de un punto a una recta se puede calcular de varias formas, en este caso, y teniendo en cuenta el apartado b, lo más práctico es calcular la distancia de P a su proyección sobre r (M).

$$d(P-r) = d(P-M)$$



La proyección de un punto sobre una recta se puede calcular por producto escalar. Se busca un punto M de la recta r que con el punto P forme un vector perpendicular al vector de dirección de la recta.

$$\overline{PM} \perp \vec{d}_r \Rightarrow \overline{PM} \circ \vec{d}_r = 0$$

Si M es un punto de la recta r, sus componentes se pueden expresar con las ecuaciones paramétricas de r.

$$M \in r: \begin{cases} x = -1-2\lambda \\ y = 2+\lambda \\ z = -1+3\lambda \end{cases} \Rightarrow M = (-1-2\lambda, 2+\lambda, -1+3\lambda)$$

$$\overline{PM} = \vec{m} - \vec{p} = (-1-2\lambda, 2+\lambda, -1+3\lambda) - (2,0,-1) = (-3-2\lambda, 2+\lambda, 3\lambda)$$

$$\overline{PM} \circ \vec{d}_r = 0: \ (-3-2\lambda, 2+\lambda, 3\lambda) \circ (-2, 1, 3) = 0: \ -2\cdot(-3-2\lambda) + 1\cdot(2+\lambda) + 3\cdot 3\lambda = 0$$

$$6+4\lambda+2+\lambda+9\lambda = 0: \ 8+14\lambda = 0: \ \lambda = -\frac{8}{14} = -\frac{4}{7}$$

Conocido el valor de λ, se calculan las coordenadas de M y la componentes del vector $\overrightarrow{PM}$.

- $M = \left(-1-2\cdot\frac{-4}{7}, 2+\frac{-4}{7}, -1+3\cdot\frac{-4}{7}\right) = \left(\frac{1}{7}, \frac{10}{7}, \frac{-19}{7}\right)$
- $\overline{PM} = \left(-3-2\cdot\frac{-4}{7}, 2+\frac{-4}{7}, 3\cdot\frac{-4}{7}\right) = \left(\frac{-13}{7}, \frac{10}{7}, \frac{-12}{7}\right)$

La distancia de P a r es el módulo de $\overrightarrow{PM}$

$$\left|\overrightarrow{PM}\right| = \sqrt{\left(\frac{-13}{7}\right)^2 + \left(\frac{10}{7}\right)^2 + \left(\frac{-12}{7}\right)^2} = \sqrt{\frac{413}{49}} = \sqrt{\frac{59}{7}}$$

b. El simétrico de P respecto de r se calcula teniendo en cuenta que M es el punto medio de $\overline{PP'}$.

$$M: \begin{cases} m_1 = \dfrac{x_p + x'_p}{2} \\ m_2 = \dfrac{y_p + y'_p}{2} \\ m_3 = \dfrac{z_p + z'_p}{2} \end{cases}$$

De las coordenadas de M se despejan las coordenadas de P'.

$$P': \begin{cases} x'_p = 2m_1 - x_p = 2\cdot\frac{1}{7} - 2 = -\frac{12}{7} \\ y'_p = 2m_2 - y_p = 2\cdot\frac{10}{7} - 0 = \frac{20}{7} \\ z'_p = 2m_3 - z_p = 2\cdot\frac{-19}{7} - (-1) = -\frac{31}{7} \end{cases} \qquad P' = \left(-\frac{12}{7}, \frac{20}{7}, -\frac{31}{7}\right)$$

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.
Hallar:

a) (1 punto) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{\sqrt[3]{3+5x-8x^3}}{1+2x}\right]^{25}$

b) (1 punto) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+4x^3\right)^{2/x^3}$

Solución.

a. $$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\sqrt[3]{3+5x-8x^3}}{1+2x}\right]^{25}=\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt[3]{\frac{3+5x-8x^3}{(1+2x)^3}}\right]^{25}\overset{(i)}{=}\lim_{x\to\infty}\left[\frac{3+5x-8x^3}{1+6x+12x^2+8x^3}\right]^{25/3}\overset{(ii)}{=}$$

$$\overset{(ii)}{=}\left[\lim_{x\to\infty}\frac{3+5x-8x^3}{1+6x+12x^2+8x^3}\right]^{25/3}\approx\left[\lim_{x\to\infty}\frac{-8x^3}{8x^3}\right]^{25/3}=\left[\lim_{x\to\infty}-1\right]^{25/3}=$$

$$=(-1)^{25/3}=\left(\sqrt[3]{-1}\right)^{25}=(-1)^{25}=-1$$

(i) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

(ii) $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^n=\left(\lim\limits_{x\to a}f(x)\right)^n\quad\forall\, n\in R$

b. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+4x^3\right)^{2/x^3}=\left(1+4\cdot 0^3\right)^{2/0^3}=1^{\infty}=?$ Indeterminación del número e.

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)}=\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a}f(x)=1\\ \lim\limits_{x\to a}g(x)=\pm\infty\end{array}\right\}\overset{1^{\pm\infty}}{=}e^{\lim\limits_{x\to a}[g(x)\cdot(f(x)-1)]}$$

Aplicando la transformación del número e:

$$\lim_{x\to 0}\left(1+4x^3\right)^{2/x^3}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{x^3}\cdot\left(1+4x^3-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{8x^3}{x^3}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}8}=e^8$$

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.
Dada la función $f(x)=\mathrm{Ln}\left(x^2+4x-5\right)$, donde Ln significa logaritmo neperiano, se pide:

a) (1 punto) Determinar el dominio de definición de f(x) y las asíntotas verticales de su gráfica.
b) (1 punto) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x)

Solución.

a. Por ser una función logarítmica, el argumento del logaritmo debe ser mayor que cero.

$$D[f(x)]=\left\{x\in R\,/\,x^2+4x-5>0\right\}$$

$$x^2+4x-5>0:\left\{x^2+4x-5=0:\begin{array}{l}x=-5\\ x=1\end{array}\right\}:(x+5)\cdot(x-1)>0$$

$$:\left\{\begin{array}{l}(-\infty,-5):\left\{\begin{array}{l}x+5<0\\ x-1<0\end{array}\right\}:(x+5)\cdot(x-1)>0\Rightarrow(-\infty,-5)\in D[f(x)]\\ (-5,1):\left\{\begin{array}{l}x+5>0\\ x-1<0\end{array}\right\}:(x+5)\cdot(x-1)<0\Rightarrow(-5,1)\notin D[f(x)]\\ (1,\infty):\left\{\begin{array}{l}x+5>0\\ x-1>0\end{array}\right\}:(x+5)\cdot(x-1)>0\Rightarrow(1,\infty)\in D[f(x)]\end{array}\right.$$

$$D[f(x)]=(-\infty,-5)\cup(1,\infty)$$

Asíntotas verticales. Los posibles puntos de asíntota vertical son los puntos excluidos del dominio, como en este caso lo que se excluye es un intervalo, los posibles puntos son los extremos del intervalo ($x \to -5^-$; $x \to 1^+$).

Para que una función tenga una asíntota vertical en un punto a, se debe cumplir:

$$\lim_{x\to} f(x) = \pm\infty$$

Comprobamos si se cumple en -5^- y 1^+:

- $\lim_{x\to -5^-} \operatorname{Ln}\left(x^2+4x-5\right) = \operatorname{Ln}\left((-5)^2+4\cdot(-5)-5\right) = \operatorname{Ln} 0 = -\infty$
- $\lim_{x\to -1^+} \operatorname{Ln}\left(x^2+4x-5\right) = \operatorname{Ln}\left(1^2+4\cdot 1-5\right) = \operatorname{Ln} 0 = -\infty$

Cuando $x \to -5^-$; $x = -5$ Asíntota vertical
Cuando $x \to 1^+$; $x = 1$ Asíntota vertical

b. La monotonía de una función está asociada al signo de la derivada:

- Si $f'(x) > 0$, la función es creciente
- Si $f'(x) < 0$, la función es decreciente

$$f'(x) = \left(\operatorname{Ln}\left(x^2+4x-5\right)\right)' = \frac{1}{x^2+4x-5}\cdot(2x+4) = \frac{2x+4}{x^2+4x-5}$$

Para estudiar el signo se factoriza la expresión y se tiene en cuenta el dominio.

$$f'(x) = \frac{2(x+2)}{(x+5)(x-1)} : \begin{cases} (-\infty,-5) : \left\{\begin{matrix} x+2<0 \\ x+5<0 \\ x-1<0 \end{matrix}\right\} : \dfrac{2(x+2)}{(x+5)(x-1)} < 0 \;\; f(x)\text{decreciente} \\ (1,\infty) : \left\{\begin{matrix} x+2>0 \\ x+5>0 \\ x-1>0 \end{matrix}\right\} : \dfrac{2(x+2)}{(x+5)(x-1)} > 0 \;\; f(x)\text{creciente} \end{cases}$$

Nota: El estudio del signo se puede hacer gráficamente sobre la recta real.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.
Dadas las funciones:

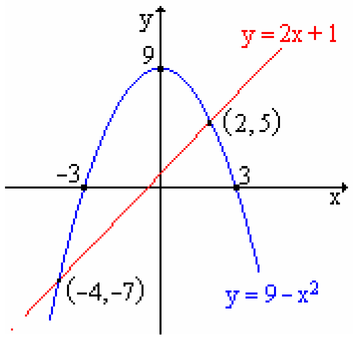
$$y = 9 - x^2, \qquad y = 2x + 1$$

se pide:

- **a)** (1punto) Dibujar las gráficas de las dos funciones identificando el recinto acotado por ellas.
- **b)** (1punto) Calcular el área de dicho recinto acotado.
- **c)** (1punto) Hallar el volumen del cuerpo de revolución obtenido al hacer girar alrededor del eje OX el recinto acotado por la gráfica de $y = 9 - x^2$ y el eje OX.

Solución.

a. $y = 9 - x^2$ Parábola abierta hacia $-\infty$.



- Cortes con OX(y = 0): $x = \pm 3 : \begin{cases} (-3, 0) \\ (3, 0) \end{cases}$

- Cortes con OY(x = 0): y = 9: (0, 9) Máximo de la parábola.

y = 2x +1: Función lineal, dos valores permitan trazarla: $\begin{cases} x = 0 : y = 1\ (0, 1) \\ x = 2 : y = 5\ (2, 5) \end{cases}$

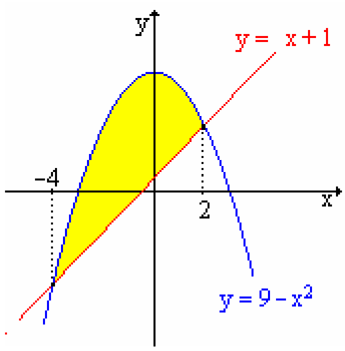
Vértices del recinto. Puntos de intersección de las dos funciones.

$$\begin{cases} y = 9 - x^2 \\ y = 2x + 1 \end{cases} : 9 - x^2 = 2x + 1$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0 : \begin{cases} x = -4 : y = -7 \\ x = 2 : y = 5 \end{cases} : (-4, -7); (2, 5)$$

Estos datos se llevan a unos ejes y se representan las dos funciones y el recinto determinan.

b. Área. Delimitada por las gráficas de las funciones y por los vértices.



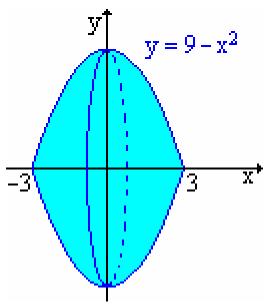
$$\text{Área} = \int_{-4}^{2} \left(9 - x^2 - (2x + 1)\right)dx = \int_{-4}^{2} \left(-x^2 - 2x + 8\right)dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 8x\right]_{-4}^{2} = \left[-\frac{x^3}{3} - x^2 + 8x\right]_{-4}^{2} =$$

$$= \left(-\frac{2^3}{3} - 2^2 + 8 \cdot 2\right) - \left(-\frac{(-4)^3}{3} - (-4)^2 + 8 \cdot (-4)\right) =$$

$$= \frac{28}{3} - \left(-\frac{80}{3}\right) = 36\,u^2$$

c. El volumen generado al hacer rotar el área bajo la curva alrededor del eje OX viene dada por la expresión:



$$V_{OX} = \int_a^b \pi f^2(x)dx = \pi \int_{-3}^{3} \left(9 - x^2\right)^2 dx = 2\pi \int_0^3 \left(9 - x^2\right)^2 dx =$$

$$= 2\pi \int_0^3 \left(9^2 - 18x^2 + x^4\right)dx = 2\pi \left[81x - \frac{18x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right]_0^3 =$$

$$= 2\pi \left[81x - 6x^3 + \frac{x^5}{5}\right]_0^3 = 2\pi \left(81 \cdot 3 - 6 \cdot 3^3 + \frac{3^5}{5}\right) - 2\pi \left(81 \cdot 0 - 6 \cdot 0^3 + \frac{0^5}{5}\right) = \frac{1296}{5} \pi\, u^3$$

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Dados el plano $\pi \equiv 2x + ay + 4z + 25 = 0$ y la recta:

$$r \equiv x + 1 = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{5}$$

se pide:

a) (1 punto) Calcular los valores de a para los que la recta r está contenida en el plano π.

b) (1 punto) Para el valor a = −2, hallar el punto (o los puntos) que pertenecen a la recta perpendicular a π que pasa por P(−3/2, 0, −11/2), y que dista (o distan) $\sqrt{6}$ unidades de π.

c) (1 punto) Para el valor a = −2, halla el seno del ángulo que forman r y π.

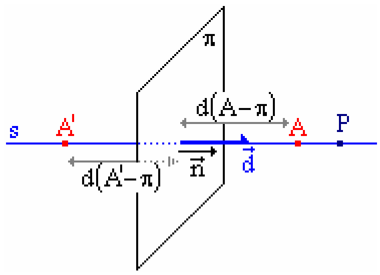
Solución.

a. Para que la recta r este contenida en π, el vector de dirección de la recta debe ser perpendicular al vector normal del plano.

$$r \perp \pi \Rightarrow \vec{d}_r \circ \vec{n}_\pi = 0$$

$$(1, 2, 5) \circ (2, a, 4) = 0 \ : \ 1 \cdot 2 + 2 \cdot a + 5 \cdot 4 = 0 \ : \ 2a = 22 \ : \ a = 11$$

b. Se buscan los puntos de la recta s que distan $\sqrt{6}$ unidades del plano π, siendo s la recta perpendicular al plano que pasa por A. Por ser s perpendicular a π, el vector de dirección de s coincide con el vector normal del plano π.



$$\pi \equiv 2x - 2y + 4z + 25 = 0$$

Las ecuaciones paramétricas de s se obtienen con el punto P y con el vector normal del plano que es paralelo a la recta.

$$s : \begin{cases} P = \left(\dfrac{-3}{2}, 0, \dfrac{-11}{2} \right) \\ \vec{d}_s = \vec{n}_\pi = (2, -2, 4) = 2(1, -1, 2) \end{cases} \qquad r : \begin{cases} x = -\dfrac{3}{2} + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = -\dfrac{11}{2} + 2\lambda \end{cases}$$

Las componentes de cualquier punto de la recta s, incluidos A y A' cumplirán las ecuaciones paramétricas de la recta.

$$A = \left(-\frac{3}{2} + \lambda, -\lambda, -\frac{11}{2} + 2\lambda \right)$$

El parámetro se determina con la distancia del punto A al plano

$$d(A - \pi) = \frac{\left| 2 \cdot \left(-\dfrac{3}{2} + \lambda \right) - 2 \cdot (-\lambda) + 4 \cdot \left(-\dfrac{11}{2} + 2\lambda \right) + 25 \right|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 4^2}} = \sqrt{6} \ : \ \frac{|-3 + 2\lambda + 2\lambda - 22 + 8\lambda + 25|}{\sqrt{24}} = \sqrt{6}$$

$$|12\lambda| = \sqrt{6} \cdot \sqrt{24} \ : \ |12\lambda| = \sqrt{6} \cdot \sqrt{24} \ : \ |12\lambda| = \sqrt{144} \ : 12\lambda = \pm 12 \ : \ \lambda = \pm 1 = \pm 1$$

$$\text{Si } \lambda = 1 : \ A = \left(-\frac{3}{2} + 1, -1, -\frac{11}{2} + 2 \cdot 1 \right) = \left(-\frac{1}{2}, -1, -\frac{7}{2} \right)$$

$$\text{Si } \lambda = -\frac{3}{2} : \ A' = \left(-\frac{3}{2} + (-1), -(-1), -\frac{11}{2} + 2 \cdot (-1) \right) = \left(-\frac{5}{2}, 1, -\frac{15}{2} \right)$$

c. El seno del ángulo que forma r y π se obtiene por aplicación del producto escalar.

$$\text{sen}\,(r - \pi) = \frac{\vec{d}_r \circ \vec{n}}{|\vec{d}_r| \cdot |\vec{n}|} = \frac{(1,2,5) \circ (2,-2,4)}{|(1,2,5)| \cdot |(2,-2,4)|} = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) + 5 \cdot 4}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 5^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 4^2}} = \frac{18}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{24}} =$$

$$= \frac{18}{\sqrt{720}} = \frac{18}{12\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$$

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.
Se considera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + my + 3z = 3 \\ x + y - 2z = 0 \\ 5x + (m+1)y + z = 9 \end{cases}$$

se pide:

a) (1 punto) Discutir el sistema según los valores de m.

b) (1 punto) Resolver el sistema para el caso de m = 0.

Solución.

a. Al sistema lo describen las matrices de coeficientes (A) y ampliada (A*).

$$A = \begin{pmatrix} 2 & m & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & m+1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 2 & m & 3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 5 & m+1 & 1 & 9 \end{pmatrix} \quad A \subset A^* \Rightarrow \text{rg } A \le \text{rg } A^* \le 3\,;\ n = 3$$

Si el $|A| \ne 0$, rg A = 3 = rg A* = n. Sistema compatible determinado. Se discute el tipo de solución para los valores del parámetro que anulan el determinante de la matriz de coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & m & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & m+1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 10m + 3m + 3 - (15 + m - 4m - 4) = -6 - 4m$$

$$|A| = 0 : -6 - 4m = 0 : m = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

Discusión.

i. Si $m \ne -\frac{3}{2}$. $|A| \ne 0 \Rightarrow \text{rg } A = \text{rg } A^* = n = 3$. Sistema compatible determinado.

ii. Si $m = -\frac{3}{2}$. $\begin{cases} 2x + -\frac{3}{2}y + 3z = 3 \\ x + y - 2z = 0 \\ 5x + \left(-\frac{3}{2}+1\right)y + z = 9 \end{cases} : \begin{Bmatrix} 2E_1 \\ 2E_3 \end{Bmatrix} : \begin{cases} 4x - 3y + 6z = 6 \\ x + y - 2z = 0 \\ 10x - y + 2z = 18 \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & -2 \\ 10 & -1 & 2 \end{pmatrix} : |A| = 0 \Rightarrow \text{rg } A < 3\,.\ \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 7 \ne 0 \Rightarrow \text{rg } A = 2\,.$$

Para estudiar el rango de la matriz ampliada, se parte del menor de orden dos distinto de cero anterior y se estudian sus menores orlados. De los dos menores orlados, uno es de determinante de la matriz de coeficientes, que para a = –3/2 es nulo, por lo tanto soo nos queda poe estudiar el menor formado por la 1ª, 2º y 4ª columna.

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \\ 10 & -1 & 18 \end{vmatrix} = 60 \ne 0 \Rightarrow \text{rg } A^* = 3 \ne \text{rg } A = 2\,.\ \text{Sistema incompatible}$$

b. Para m = 0. Sistema compatible determinado. $\begin{cases} 2x + \quad + 3z = 3 \\ x + y - 2z = 0 \\ 5x + y + z = 9 \end{cases}$. Cramer

$$|A| = -6 - 4m = \{m = 0\} = -6 - 4 \cdot 0 = -6$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 9 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-6} = 3 : \ x = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 5 & 9 & 1 \end{vmatrix}}{-6} = -5 : \ x = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 9 \end{vmatrix}}{-6} = -1$$

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ estudiar para que valores de a tiene inversa y calcularla siempre que sea posible.

Solución.

Para que una matriz tenga inversa su determinante debe ser distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = a + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = a$$

$$\exists\, A^{-1}\ \forall\ a \neq 0$$

Calculo de la inversa:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{adj} A^t = \frac{1}{a} \operatorname{adj} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}^t = \frac{1}{a} \operatorname{adj} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} = \frac{1}{a} \cdot \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & a \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \begin{pmatrix} a & -(a^2 - 1) & -1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1 - a^2}{a} & -\frac{1}{a} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$$